



Ce document a été mis en ligne par l'organisme [FormaV](#)®

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :

www.formav.co/explorer

Corrigé du sujet d'examen - E3.1 - Pilotage d'opérations de production, de traitement et de transfert des eaux - BTS ME (Léa Mercier) - Session 2019

1. Contexte du sujet

Ce sujet d'examen de mathématiques pour le BTS Métiers de l'Eau (ME) aborde des concepts liés aux équations différentielles, aux modèles exponentiels et logistiques, ainsi qu'à la théorie des probabilités. Les exercices sont conçus pour évaluer la capacité des étudiants à appliquer des méthodes mathématiques à des situations réelles, notamment en lien avec la microbiologie et la qualité de l'eau.

2. Correction des questions

Exercice 1

Partie A : Équation différentielle

Question 1 : Déterminer les solutions sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle $20y' - 20,8y = 0$.

Pour résoudre cette équation, on peut la réécrire sous la forme :

$$y' = 1,04y.$$

C'est une équation différentielle de type exponentielle. La solution générale est de la forme :

$$y(t) = Ce^{(1,04t)}, \text{ où } C \text{ est une constante.}$$

Question 2 : En déduire la fonction f solution de cette équation différentielle qui vérifie $f(0) = 10$.

Pour trouver C , on utilise la condition initiale :

$$f(0) = Ce^{(1,04 \cdot 0)} = C = 10.$$

Donc, la solution est :

$$f(t) = 10e^{(1,04t)}.$$

Partie B : Modèle exponentiel

Question 1 : Compléter le tableau avec $z_i = \ln(N_i)$.

On calcule les valeurs de z_i pour chaque N_i :

- $ti = 0 : z_0 = \ln(10) \approx 2.3026$
- $ti = 1 : z_1 = \ln(27) \approx 3.2958$
- $ti = 2 : z_2 = \ln(78) \approx 4.3553$
- $ti = 3 : z_3 = \ln(232) \approx 5.4466$
- $ti = 4 : z_4 = \ln(650) \approx 6.5092$
- $ti = 5 : z_5 = \ln(1800) \approx 7.4955$
- $ti = 6 : z_6 = \ln(5100) \approx 8.5298$
- $ti = 7 : z_7 = \ln(14100) \approx 9.2765$
- $ti = 8 : z_8 = \ln(39000) \approx 10.5708$

Question 2 : Déterminer une équation de la droite d'ajustement Δ du nuage de points (ti, zi) .

Utilisation de la méthode des moindres carrés pour trouver a et b :

On obtient : $z = 1,04t + 2,30$ (valeurs arrondies au millième).

Question 3 : Déterminer une expression de la fonction N qui modélise le nombre de bactéries SA à l'instant t .

En utilisant l'équation de la droite d'ajustement, on a :

$$z = \ln(N) = 1,04t + 2,30, \text{ donc } N(t) = e^{(1,04t + 2,30)} = 10e^{(1,04t)}.$$

Question 4 : Estimer la durée G en minutes pour que la population double.

On sait que $N(t + G) = 2N(t)$, donc :

$$10e^{(1,04(t + G))} = 20e^{(1,04t)} = e^{(1,04G)} = 2.$$

$$G = \ln(2) / 1,04 \approx 0,67 \text{ heures} \approx 40 \text{ minutes.}$$

Question 5 : Calculer la limite de N en $+\infty$.

Limite : $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = +\infty$, car la fonction exponentielle croît indéfiniment.

Partie C : Modèle logistique

Question 1 : Étudier les variations de la fonction M sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

La dérivée $M'(t)$ est positive pour tout t , donc M est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Question 2.a : Déterminer la limite de M en $+\infty$.

$$\text{Limite : } \lim_{t \rightarrow +\infty} M(t) = 13500.$$

Question 2.b : Le modèle logistique est plus vraisemblable car il prend en compte une capacité limite de l'environnement.

Question 3 : Déterminer le temps nécessaire pour que le nombre de bactéries SA dépasse 10 000.

On résout l'équation $13500 / (1350e^{(-1,04t)} + 1) > 10000$.

On trouve $t \approx 4$ heures (arrondi).

Question 4 : Déterminer l'instant où la vitesse de prolifération est maximale.

La vitesse est maximale lorsque $M'(t)$ est maximale, ce qui se produit vers $t = 4$ h.

Exercice 2

Partie A : Eau de source et eau minérale naturelle

Question 1 : Calculer les probabilités $P(M)$ et $P(S)$.

$$P(M) = 37000 / 126000 \approx 0,2937 \text{ et } P(S) = 89000 / 126000 \approx 0,7063.$$

Question 2 : Calculer la probabilité de choisir une analyse qui révèle une eau non conforme.

$$P(N) = P(M) * 0,0012 + P(S) * 0,0008 \approx 0,000293.$$

Question 3 : Calculer la probabilité qu'une analyse porte sur une bouteille d'eau minérale naturelle, sachant qu'elle révèle une eau non conforme.

On utilise la formule de Bayes :

$$P(M|N) = P(N|M) * P(M) / P(N) \approx 0,2937.$$

Partie B : Étude du nitrate présent dans l'eau

Question 1 : Déterminer la moyenne \bar{x} et l'écart type s' .

Calculs à réaliser avec les valeurs centrales des classes. On obtient :

$$\bar{x} \approx 4,5 \text{ mg/L et } s' \approx 0,0976 \text{ mg/L.}$$

Question 2 : Vérifier que $s = 0,0976$ est un estimateur de l'écart type σ .

Oui, car s est calculé à partir de l'échantillon.

Question 3 : Énoncer la règle de décision de ce test.

On rejette H_0 si $|Z| > Z(\alpha/2)$ où Z suit la loi normale centrée réduite.

Question 4 : Peut-on accepter l'hypothèse $\mu = 4,5$?

On compare la moyenne observée à 4,5 et on conclut selon le test.

Partie C : Distribution

Question 1 : Estimer si le biologiste a raison.

Si la probabilité est très faible (0,005), il a raison de s'inquiéter.

Question 2 : Donner les paramètres n et p de la loi binomiale.

$$n = 540 \text{ et } p = 528/540 \approx 0,978.$$

3. Synthèse finale

Erreurs fréquentes :

- Confusion entre les modèles exponentiels et logistiques.
- Omissions dans les calculs de probabilités conditionnelles.
- Erreur dans l'application des formules de statistiques.

Points de vigilance :

- Vérifiez toujours les conditions initiales dans les équations différentielles.
- Assurez-vous de bien comprendre les concepts de loi normale et binomiale.

Conseils pour l'épreuve :

- Lire attentivement chaque question et identifier les données importantes.
- Utiliser des schémas ou des tableaux pour organiser les informations.
- Prendre le temps de vérifier les calculs avant de rendre la copie.

© FormaV EI. Tous droits réservés.

Propriété exclusive de FormaV. Toute reproduction ou diffusion interdite sans autorisation.

Copyright © 2026 FormaV. Tous droits réservés.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.

Copyright © 2026 FormaV. Tous droits réservés.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.