Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MÉTIERS DE L • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Variable selon la spécialité : de 1 à 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Départ d'un train à très haute vitesse et calcul d'aire (13 questions) **Page 3**

2. Obsolescence programmée des smartphones et outils probabilistes (13 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://btsme.fr/assets/annales/bts-me/E2 - Mathématiques/2018/BTS ME - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Départ d'un train à très haute vitesse et calcul d'aire

Un projet de train à propulsion électromagnétique vise une vitesse instantanée de 400 km/h en moins de deux minutes, et la distance parcourue est modélisée par une fonction. L'exercice étudie une équation différentielle, les variations et la vitesse du wagon, puis l'aire hachurée d'une pièce prévue pour les gares.

A. Résolution d'une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l'équation différentielle homogène (E0) : y' - 0,2y = 0.

L'équation s'écrit sous la forme fournie $y' + ay = 0$, avec $a = -0,2$. La formule donne alors $y(t) = ke^{-at}$. Comme $-a = 0,2$, cette expression est définie et dérivable sur tout l'intervalle demandé. La constante réelle k décrit toutes les solutions, y compris la solution nulle lorsque $k = 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0, +\infty[$, l'ensemble des solutions est $y(t) = ke^{0,2t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2°. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = -15t - 75 est une solution de l'équation différentielle (E) : y' - 0,2y = 3t.

1. La dérivée de $g(t) = -15t - 75$ est $g'(t) = -15$.
2. Le membre de gauche de (E) vaut $g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75) = 3t$.

Il est égal au membre de droite pour tout t de l'intervalle : la fonction proposée vérifie bien l'équation différentielle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La fonction $g(t) = -15t - 75$ est bien une solution particulière de l'équation différentielle (E).

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

Une solution de l'équation complète est la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène associée. La solution particulière est $g(t) = -15t - 75$, et les solutions homogènes sont $ke^{0,2t}$. En les additionnant, on obtient la famille complète des solutions. La constante k peut prendre toute valeur réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Toutes les solutions de (E) sont $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$, où $k \in \mathbb{R}$.

Question 4°. Déterminer la fonction f solution de (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 0, sachant qu'au temps t = 0 le wagon est au point de départ.

1. La solution générale est $f(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$.
2. En imposant $f(0) = 0$, on obtient $k - 75 = 0$, donc $k = 75$.

On remplace cette constante dans la solution générale. L'écriture factorisée met en évidence que la distance initiale est nulle, conformément à la condition au départ.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La solution vérifiant la condition initiale est $f(t) = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t$, en kilomètres.

B. Étude de fonction et application

Question 1° a). À partir des expressions fournies pour f et f', résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

L'expression fournie donne $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. Comme $15 > 0$, le signe de la dérivée est celui de $e^{0,2t} - 1$. L'exponentielle est au moins égale à 1 exactement lorsque $0,2t \geq 0$, soit $t \geq 0$. Cette condition est vérifiée sur tout l'intervalle étudié.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0, 3]$, $f'(t) \geq 0$ partout, avec égalité seulement en $t = 0$.

Question 1° b). Déduire de l'étude du signe de f' les variations de f sur l'intervalle [0, 3].

t	**0**	$(0, 3]$	**3**
Signe de $f'(t)$	0	$+$	
Valeur ou variation de f	0	croissante	$75(e^{0,6} - 1) - 45 \approx 16,659$

La dérivée est strictement positive après l'instant initial. La fonction est donc croissante sur tout l'intervalle $[0, 3]$, de $f(0) = 0$ à $f(3) \approx 16,659$ km.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f croît sur $[0, 3]$, de 0 à environ $16,659$ km.

Question 2°. Déterminer le nombre de kilomètres parcourus par le wagon au bout d'une minute et arrondir le résultat au dixième.

La distance après une minute se calcule avec la fonction donnée : $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15$. On obtient environ $1,6052$ km. L'arrondi demandé est au dixième de kilomètre : on conserve donc une décimale.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Au bout d'une minute, le wagon a parcouru environ $1,6$ km, arrondi au dixième.

Question 3° a). Sachant que la vitesse à l'instant t correspond à f'(t), déterminer la vitesse du wagon à t = 2 minutes, en kilomètre par minute, et arrondir au dixième.

La vitesse instantanée correspond à la dérivée de la distance. En utilisant $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$, on calcule $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1) \approx 7,377$ km/min. Arrondie au dixième de kilomètre par minute, cette vitesse vaut $7,4$ km/min.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> À $t = 2$ minutes, la vitesse du wagon est d'environ $7,4$ km/min, au dixième près.

Question 3° b). Dire si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse.

Convertissons la vitesse cible : 400 km/h vaut $400/60 = 20/3$ km/min. La vitesse $f'(t) = 15(e^{0,2t} - 1)$ atteint cette valeur pour $t = 5\ln(13/9) \approx 1,839$ minute. Cette durée est inférieure à deux minutes : l'objectif fixé par les ingénieurs est donc atteint.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : la vitesse de 400 km/h est atteinte après environ $1,839$ minute, avant la limite de deux minutes.

Question 4°. Parmi les trois propositions, recopier l'équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 2 qui vous paraît exacte. Aucune justification n'est demandée.

La tangente au point d'abscisse 2 est donnée par $y = f'(2)(t - 2) + f(2)$. Or $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1)$ et $f(2) = 75(e^{0,4} - 1) - 30$. En développant et en réduisant cette équation, on retrouve la troisième proposition du QCM.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La bonne proposition est $y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$, équation de la tangente en $t = 2$.

C. Calcul intégral

Question 1°. Parmi les trois propositions, choisir l'aire A1 du rectangle OPQR, en unités d'aire. Aucune justification n'est demandée.

Sur le schéma, le rectangle OPQR s'étend de $x = 0$ à $x = 3$, soit une largeur de 3 unités. Sa hauteur est celle du bord supérieur, $y = 2,25$. Son aire est le produit de ces deux dimensions, ce qui correspond à la troisième proposition du QCM.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le rectangle OPQR a pour aire $A_1 = 6,75$ unités d'aire : c'est la troisième proposition.

Question 2°. À l'aide de la primitive fournie, calculer l'aire A2 de la partie du plan limitée par la courbe représentative de g, l'axe des abscisses et les droites x = 0 et x = 3.

La fonction g est positive sur $[0, 3]$, donc l'aire cherchée est son intégrale. Avec la primitive fournie, $A_2 = \left[\frac{27}{4}\ln(x^2+9)\right]_0^3$. Ainsi, $A_2 = \frac{27}{4}(\ln 18 - \ln 9) = \frac{27}{4}\ln 2$, soit environ $4,679$ unités d'aire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'aire sous la courbe entre $x = 0$ et $x = 3$ vaut $A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ u. a.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'aire hachurée A, en unités d'aire, et arrondir le résultat au millième.

La figure est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. À droite de cet axe, l'aire hachurée est celle du rectangle OPQR diminuée de l'aire sous la courbe, soit $A_1 - A_2$. On double cette différence : $A = 2\left(6,75 - \frac{27}{4}\ln 2\right) \approx 4,142512$ unités d'aire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'aire totale hachurée, en tenant compte de la symétrie, est $A \approx 4,143$ unités d'aire.

2. Obsolescence programmée des smartphones et outils probabilistes

L'exercice exploite des données sur l'obsolescence technique et logicielle d'une population de smartphones pour étudier des probabilités conditionnelles. Il modélise ensuite les téléphones non réparables par une loi binomiale et examine, par un test bilatéral, une affirmation concernant la marque B.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des données sur les deux types d'obsolescence dans une population de 200 smartphones, compléter le tableau d'effectifs croisant obsolescence technique et obsolescence logicielle.

Sur 200 téléphones, 3 % sont touchés par T, soit 6, et 8 % par L, soit 16. Parmi les téléphones touchés par L, 12,5 % sont aussi touchés par T, soit 2. On complète ensuite les cases par différence : 4 touchés par T seulement, 14 touchés par L seulement et 180 touchés par aucun des deux types.

Smartphones	Touchés par L	Non touchés par L	Total
Touchés par T	2	4	6
Non touchés par T	14	180	194
Total	16	184	200

Tableau d'effectifs complété

Smartphones	touchés par l'obsolescence logicielle	non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
touchés par l'obsolescence technique	**2**	**4**	**6**
non touchés par l'obsolescence technique	**14**	**180**	**194**
Total	**16**	**184**	200

✓ RÉPONSE À RETENIR

Effectifs : 2, 4, 14 et 180 ; totaux : 6, 194, 16 et 184.

Question 2°. Donner les probabilités P(T), P(L) et P_L(T), où T désigne l'événement « le smartphone est touché par l'obsolescence technique » et L l'événement « le smartphone est touché par l'obsolescence logicielle ».

Les probabilités simples sont les effectifs concernés rapportés aux 200 smartphones. Il y en a 6 touchés par T et 16 touchés par L. Pour la probabilité conditionnelle, on se limite aux 16 téléphones touchés par L : parmi eux, 2 sont aussi touchés par T. On obtient donc les trois rapports correspondants, sans confondre la condition L avec la condition T.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T) = 0,03$, $P(L) = 0,08$ et $P_L(T) = 0,125$.

Question 3° a). Calculer la probabilité P(T ∩ L) qu'un smartphone soit touché par les deux types d'obsolescence.

L'événement $T \cap L$ signifie que le smartphone est touché par les deux types d'obsolescence. Le tableau indique 2 téléphones dans cette intersection, sur 200. On peut aussi utiliser la probabilité conditionnelle donnée : $P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T) = 0,08 \times 0,125$. Ces deux méthodes conduisent à la même probabilité.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T \cap L) = 0,01$.

Question 3° b). Calculer la probabilité P(T ∪ L) qu'un smartphone soit touché par au moins l'un des deux types d'obsolescence.

L'événement $T \cup L$ regroupe les smartphones touchés par au moins un type d'obsolescence. En additionnant les effectifs de T et de L, les 2 téléphones de l'intersection sont comptés deux fois. On les retranche donc une fois : $6 + 16 - 2 = 20$. La probabilité recherchée est cet effectif rapporté aux 200 smartphones étudiés.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T \cup L) = 20/200 = 0,10$.

Question 3° c). Calculer la probabilité P_T(L) qu'un smartphone soit touché par l'obsolescence logicielle sachant qu'il est touché par l'obsolescence technique.

La probabilité $P_T(L)$ se calcule parmi les smartphones touchés par l'obsolescence technique. Il y en a 6 au total, dont 2 sont aussi touchés par l'obsolescence logicielle. On divise donc l'effectif de l'intersection par celui de T : $P_T(L) = 2/6$. L'exercice demande un arrondi au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P_T(L) = 1/3 \approx 0,333$.

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que la variable aléatoire X, qui compte le nombre de smartphones non réparables dans un lot de 50, suit une loi binomiale et en déterminer les paramètres.

Le prélèvement est assimilé à des tirages avec remise : les 50 tirages sont indépendants et la probabilité d'obtenir un smartphone non réparable reste égale à $0,045$. La variable X compte le nombre de smartphones non réparables parmi ces 50 tirages. Elle suit donc une loi binomiale, de paramètres le nombre de tirages et la probabilité de succès.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(50; 0,045)$.

Question 2°. Calculer la probabilité que tous les smartphones d'un lot de 50 soient réparables.

Tous les smartphones sont réparables lorsque le lot ne contient aucun téléphone non réparable. La probabilité qu'un téléphone soit réparable est $1 - 0,045 = 0,955$. Par indépendance des tirages, la probabilité que les 50 téléphones soient réparables est donc $0,955^{50}$. On arrondit le résultat au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X = 0) = 0,955^{50} \approx 0,100$.

Question 3° a). Exécuter à la main l'algorithme donné et compléter le tableau des valeurs de P(X = i) et de la somme S pour i allant de 0 à 3.

Pour chaque valeur de i, l'algorithme calcule $P(X = i) = \binom{50}{i}(0,045)^i(0,955)^{50-i}$, puis ajoute cette probabilité à la somme précédente. Les probabilités et sommes cumulées sont présentées au millième, conformément à la consigne générale de l'exercice.

i	**0**	**1**	**2**	**3**
$P(X = i)$	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Probabilités : 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. Sommes cumulées : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question 3° b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat.

La boucle additionne les probabilités des quatre cas $X = 0$, $X = 1$, $X = 2$ et $X = 3$. À la fin, la somme correspond à la probabilité qu'un lot contienne au plus 3 smartphones non réparables. Elle est obtenue en additionnant les probabilités exactes, puis en arrondissant le résultat au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $S = P(X \leq 3) \approx 0,813.$

Question 4°. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat.

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance vaut $E(X) = np$. Ici, $E(X) = 50 \times 0,045 = 2,25$. Cela signifie que, sur un grand nombre de lots de 50 smartphones, le nombre moyen de téléphones non réparables par lot est de 2,25.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(X) = 2,25$ smartphones non réparables par lot en moyenne.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Choisir la valeur de h, arrondie au centième, telle que sous l'hypothèse H0 la probabilité que F appartienne à [0,55 - h ; 0,55 + h] soit égale à 0,95. Les choix proposés sont 0,05, 0,06 et 0,07.

Sous H_0, l'écart type de F vaut $0,037$. L'intervalle central contenant 95 % des valeurs d'une loi normale est approximativement à $1,96$ écarts types de sa moyenne. Ainsi, $h \approx 1,96 \times 0,037 = 0,07252$, soit $0,07$ arrondi au centième. C'est la seule valeur proposée qui convient.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $h \approx 0,07.$

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 %, pour H0 : p = 0,55 et H1 : p ≠ 0,55.

Au seuil de 5 %, l'intervalle central de probabilité 95 % sous H_0 est approximativement $[0,55 - h ; 0,55 + h]$. Avec $h = 0,07$, ses bornes sont $0,48$ et $0,62$. La règle consiste à ne pas rejeter H_0 si la fréquence observée appartient à cet intervalle, et à rejeter H_0 si elle est en dehors.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter H_0 si $0,48 \leq F \leq 0,62$; sinon, rejeter H_0.

Question 3°. Sur les 180 personnes interrogées, 76 pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée. Formuler la conclusion du test.

La fréquence observée est $76/180 \approx 0,422$. Elle est inférieure à la borne basse $0,48$ de l'intervalle d'acceptation. La fréquence se trouve donc dans la région de rejet du test. Au seuil de 5 %, on rejette l'hypothèse selon laquelle 55 % des Français pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> On rejette H_0 au seuil de 5 % : la proportion diffère de 0,55.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Session 2018 du BTS Mathématiques, groupement B, code MATGRB1, durée de deux heures et coefficient variable selon la spécialité, de 1 à 3. Les deux exercices valent chacun 10 points. Le premier porte sur le départ d'un train à très haute vitesse et l'aire d'une pièce de gare; le second étudie l'obsolescence des smartphones. Les compétences évaluées couvrent équations différentielles, analyse, intégration, probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' - 0,2y = 3t, la solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.
- La vitesse instantanée est la dérivée de la distance par rapport au temps; convertir les unités avant toute comparaison.
- Pour une loi binomiale B(n,p), P(X = k) = C(n,k)p^k(1-p)^(n-k) et E(X) = np.
- Une probabilité conditionnelle se calcule en divisant la probabilité de l'intersection par celle de l'événement qui conditionne.

Points de vigilance & attentes du jury

- Préciser les unités de distance, de temps et de vitesse, puis les convertir avant de conclure sur l'objectif.
- Dans un tableau à double entrée, vérifier les totaux des lignes, des colonnes et l'effectif global.
- Pour une probabilité conditionnelle, identifier clairement l'événement qui constitue le conditionnement.
- Dans le test bilatéral, calculer la fréquence observée et la comparer aux bornes de décision avant de conclure.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver la solution de l'équation différentielle avec un second membre ?

Résolvez d'abord l'équation homogène, puis ajoutez une solution particulière de l'équation complète. Appliquez ensuite la condition initiale pour déterminer la constante et obtenir la fonction qui modélise le mouvement.

Q : Comment choisir les paramètres de la loi binomiale pour le lot de smartphones ?

Le nombre d'essais est le nombre de téléphones prélevés, soit 50. La probabilité de compter un téléphone non réparable est 0,045, et le prélèvement est assimilé à des tirages avec remise.

Q : Combien de points vaut chaque exercice et quelle est la durée de l'épreuve ?

Chacun des deux exercices vaut 10 points, soit 20 points au total. La durée officielle est de deux heures. Le coefficient dépend de la spécialité du BTS et varie de 1 à 3 selon le tableau de la page de garde.

Q : Que faut-il vérifier pour conclure correctement au test d'hypothèse ?

Déterminez l'intervalle de décision sous H0 à partir du seuil de 5 %, puis calculez la fréquence observée sur les 180 personnes. Comparez-la aux bornes et formulez la conclusion dans le contexte de la marque B.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsme.fr/assets/annales/bts-me/E2 - Mathématiques/2018/BTS ME - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

Ressources BTS Métiers de l : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.