Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MÉTIERS DE L • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour les spécialités indiquées, 3 pour Traitement des matériaux**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Probabilités, durée de vie des tubes fluorescents et intervalle de confiance (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsme.fr/assets/annales/bts-me/E2 - Mathématiques/2022/BTS ME - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m/s est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction du temps. Les questions portent sur une équation différentielle, l'étude de la fonction et de sa courbe, la distance parcourue, un développement limité et la tangente.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. **Résoudre l'équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,8y = 0.**

La formule donnée pour $y' + ay = 0$ donne $y(t) = ke^{-at}$, avec k réel. Ici, $a = 0,8$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. **La fonction g est définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.**

La fonction g est constante, donc $g'(t) = 0$.

$$g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4.$$

L'égalité est vérifiée pour tout $t \geq 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> g est solution de (E), car $g'(t) + 0,8g(t) = 4$.

Question 1. c. **Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.**

La différence entre une solution de (E) et la solution particulière $g(t) = 5$ vérifie l'équation homogène (E_0). Elle s'écrit donc $ke^{-0,8t}$, où $k \in \mathbb{R}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. **Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

Dans la solution générale, la condition $f(0) = 20$ donne $5 + k = 20$, puisque $e^0 = 1$. Ainsi, $k = 15$.

On remplace cette constante dans la solution générale.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, pour $t \geq 0$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

On a $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque $t \to +\infty$, $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Le terme exponentiel tend vers zéro et il reste la constante 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de la limite de f en +∞ que la courbe représentative C admet une asymptote, puis en donner une équation.

Une fonction qui tend vers une limite finie en +∞ admet une asymptote horizontale d'équation $y = L$, où L est cette limite. Ici, $L = 5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. En utilisant l'expression donnée de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Comme $e^{-0,8t} > 0$, on a $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ sur l'intervalle. La fonction est donc strictement décroissante.

t	0	+∞
Signe de $f'(t)$	−	
Variation de f	20	↘ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0 ; +\infty[$.

Question 3. Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?

Pour tout $t \geq 0$, le terme exponentiel est strictement positif. La vitesse reste donc toujours supérieure à 5 $m \cdot s^{-1}$ et ne peut pas s'annuler.

- La vitesse diminue.
- Elle tend vers 5 m·s^{-1} sans l'atteindre.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, le chariot ne s'arrête pas selon ce modèle.

Question 4. a. **La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant *F*, la règle de dérivation de l'exponentielle donne :

1. $F'(t) = -18{,}75 \times (-0{,}8)e^{-0{,}8t} + 5$.
2. $F'(t) = 15e^{-0{,}8t} + 5 = f(t)$.

Donc *F* est une primitive de *f*.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: *F* est une primitive de *f*.

Question 4. b. **La distance parcourue entre les instants t_0 et t_1 est donnée par l'intégrale de f entre ces instants. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance vaut $F(1) - F(0)$. Or $F(1) = -18{,}75e^{-0{,}8} + 5$ et $F(0) = -18{,}75$. Ainsi, $d = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0{,}8}$ m, soit *15,325081925…* m. Arrondie au centimètre, elle vaut 15,33 m.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = \frac{95}{4} - \frac{75}{4}e^{-4/5}$ m, soit *15,33 m* au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Question à choix multiples : recopier la seule expression exacte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée.**

Le tableau des choix montre que seule la troisième proposition conserve le polynôme affiché et ajoute un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. C'est la forme correcte d'un développement limité à l'ordre 2.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième expression : $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente en 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. On lit $f(0) = 20$ et, avec l'expression de la dérivée, $f'(0) = -12e^0 = -12$. En remplaçant ces valeurs, on obtient l'équation de la tangente.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 20 - 12t$.

2. Probabilités, durée de vie des tubes fluorescents et intervalle de confiance

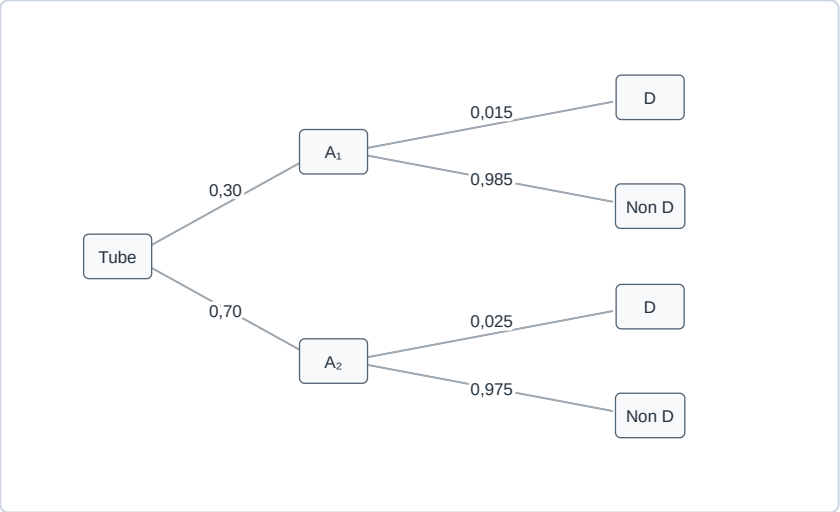
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers ayant des taux de défaut différents, et l'on étudie la conformité des tubes ainsi que leur durée de bon fonctionnement. Une autre partie porte sur l'estimation de la proportion de rivets conformes utilisés pour fixer les tubes, à partir d'un échantillon de 1 000 rivets.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation, avec la provenance du tube (atelier 1 ou atelier 2) et son état (défectueux ou non défectueux), à partir des données de production.

La première branche indique l'atelier d'origine : 30 % des tubes viennent de l'atelier 1 et 70 % de l'atelier 2. Pour chaque atelier, on sépare ensuite les tubes défectueux des tubes sans défaut. Les probabilités de ces branches sont conditionnelles à l'atelier : 1,5 % de défauts en atelier 1 et 2,5 % en atelier 2. Les probabilités complémentaires valent respectivement 98,5 % et 97,5 %.

Arbre pondéré des tubes



D : tube défectueux.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> A_1 : 0,30 ; A_2 : 0,70. Depuis A_1 : D 0,015, non D 0,985. Depuis A_2 : D 0,025, non D 0,975.

Question 2. Calculer la probabilité $P(A_1 \cap D)$, où A_1 désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

Pour obtenir l'événement simultané « atelier 1 et défaut », on suit le chemin correspondant dans l'arbre et on multiplie la probabilité de choisir l'atelier 1 par la probabilité conditionnelle d'un défaut dans cet atelier. Ainsi, avec les données de production : $P(A_1 \cap D) = P(A_1)P(D \mid A_1) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$. Cette probabilité est exprimée sur l'ensemble des tubes produits.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_1 \cap D) = 0{,}0045$.

Question 3. **Montrer que la probabilité qu'un tube choisi au hasard présente un défaut est égale à 0,022.**

Un tube défectueux provient soit de l'atelier 1, soit de l'atelier 2. Ces deux événements étant incompatibles, on additionne les probabilités des deux chemins menant à un défaut : $P(D) = P(A_1)P(D \mid A_1) + P(A_2)P(D \mid A_2)$. Avec les proportions de production et les taux de défaut indiqués, $P(D) = 0{,}30 \times 0{,}015 + 0{,}70 \times 0{,}025 = 0{,}022$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0{,}022$.

Question 4. **Sachant que le tube choisi ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

La probabilité recherchée est conditionnelle à l'absence de défaut. Le numérateur est la probabilité qu'un tube provienne de l'atelier 2 et ne soit pas défectueux : $0{,}70 \times 0{,}975 = 0{,}6825$. La probabilité d'absence de défaut est $1 - 0{,}022 = 0{,}978$. On divise donc la probabilité de l'événement conjoint par celle de l'absence de défaut.

$P(A_2 \mid \overline{D}) = \dfrac{0{,}6825}{0{,}978} \approx 0{,}698.$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0{,}698$, soit environ $69{,}8\,\%$.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée de bon fonctionnement T d'un tube suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, la formule du sujet donne $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$. En remplaçant λ par $0{,}001$, on obtient $E(T) = \dfrac{1}{0{,}001} = 1\,000$ heures. Cette espérance représente la durée moyenne de bon fonctionnement des tubes dans le stock. Elle ne signifie pas que chaque tube fonctionnera exactement 1 000 heures.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 1\,000$ heures en moyenne.

Question 2. **Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement du tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

La formule donnée pour la loi exponentielle est $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Pour une durée de 8 000 heures, on remplace t par 8 000 et λ par 0,001 : $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0{,}001 \times 8\,000} = 1 - e^{-8} \approx 0{,}9997$. La variable étant continue, la probabilité d'obtenir exactement 8 000 heures est nulle. L'arrondi au centième est donc 1,00.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8\,000) \approx 1{,}00$ au centième.

Question 3. Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement du tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

Pour une loi exponentielle, la probabilité de dépasser t est le complément de la fonction de répartition, soit $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Pour 10 000 heures, on obtient $P(T > 10\,000) = e^{-0{,}001 \times 10\,000} = e^{-10} \approx 0{,}0000454$. Cette probabilité est très faible ; arrondie au centième comme demandé, elle vaut 0,00.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0{,}00$ au centième.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Sur un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée de rivets conformes dans l'échantillon. Parmi les 1 000 rivets prélevés, 975 sont conformes : $\hat{p} = \dfrac{975}{1\,000} = 0{,}975$. Cette fréquence fournit une estimation de la proportion de rivets conformes dans l'ensemble de la production, sans être nécessairement égale à la proportion réelle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\hat{p} = 0{,}975$, soit $97{,}5\,\%$.

Question 2. Déterminer, à partir de la fréquence observée sur l'échantillon, un intervalle de confiance centré sur cette fréquence pour la proportion p au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.

La fréquence observée est $f = 975/1\,000 = 0{,}975$, pour un échantillon de taille $n = 1\,000$. On applique la formule à 95 % fournie dans le sujet : $\left[f - 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}} \ ; \ f + 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}} \right]$. Les bornes obtenues sont environ 0,965323 et 0,984677. L'arrondi au millième donne l'intervalle demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}965 \ ; \ 0{,}985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, d'une durée de 2 heures, avec un coefficient de 2 selon la spécialité, sauf Traitement des matériaux, coefficient 3. Les deux exercices étudient le freinage d'un chariot et la conformité de tubes et de rivets, mobilisant équations différentielles, analyse, intégration, probabilités et estimation statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, les solutions s'obtiennent en ajoutant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène.
- Si f(t) tend vers L quand t tend vers +∞, la courbe représentative admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, E(T) = 1/λ et P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt).
- L'intervalle de confiance à 95 % utilisé pour une proportion est f ± 1,96√(f(1-f)/n).

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale après avoir déterminé l'ensemble des solutions de l'équation différentielle.
- Pour la question sur l'arrêt, confronter la limite de la vitesse à zéro et interpréter le résultat dans le contexte.
- Calculer la distance avec $F(t_1) - F(t_0)$, puis appliquer l'arrondi au centimètre demandé.
- Distinguer la probabilité d'une intersection de la probabilité conditionnelle et identifier correctement l'événement connu.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer la distance parcourue à partir de la fonction vitesse ?

La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse sur cet intervalle. Avec une primitive F, calculez $F(t_1) - F(t_0)$, puis exprimez le résultat en mètres et arrondissez au centimètre.

Q : Quelle formule utiliser pour les probabilités d'une durée exponentielle ?

Pour T de loi exponentielle de paramètre λ, P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt) et P(T > t) = e^(-λt). Son espérance est 1/λ. Ici, λ = 0,001 par heure et l'espérance est exprimée en heures.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Les trois parties de chaque exercice peuvent être traitées indépendamment. Répartissez les deux heures entre les exercices, avancez sur les questions accessibles et gardez du temps pour vérifier les calculs, les unités et les arrondis demandés.

Q : Que faut-il présenter pour justifier les calculs de probabilité et l'intervalle de confiance ?

Définissez les événements ou la fréquence observée, écrivez la formule adaptée et remplacez les paramètres par leurs valeurs. Pour une probabilité conditionnelle, précisez l'événement sachant lequel elle est calculée et respectez l'arrondi indiqué.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsme.fr/assets/annales/bts-me/E2 - Mathématiques/2022/BTS ME - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Métiers de l : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.