Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MÉTIERS DE L • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d’un chariot : équation différentielle, étude de fonction et étude locale (12 questions) **Page 3**

2. Étude d’un système électrique entrée-sortie par transformées de Laplace (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsme.fr/assets/annales/bts-me/E2 - Mathématiques/2022/BTS ME - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Freinage d’un chariot : équation différentielle, étude de fonction et étude locale

Un chariot de fête foraine se déplace à 20 m/s avant d’être ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction f. Les questions portent sur une équation différentielle, les variations et la limite de f, la distance parcourue, un développement limité et la tangente à la courbe.

Partie A - Résolution d’une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l’équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l’intervalle considéré, en utilisant la formule fournie.

La formule fournie donne, pour $a = 0,8$, les solutions de l’équation homogène : $y(t) = ke^{-0,8t}$, où k est une constante réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction constante g définie par g(t) = 5 est solution de l’équation différentielle y' + 0,8y = 4.

1. Comme $g(t) = 5$ est constante, $g'(t) = 0$.
2. Alors $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$.

L’équation est vérifiée pour tout t.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est solution de (E).

Question 1.c. Déduire des questions précédentes l’ensemble des solutions de l’équation différentielle y' + 0,8y = 4.

> Une solution de l’équation complète s’obtient en ajoutant une solution particulière aux solutions de l’équation homogène. Avec la solution particulière $g(t) = 5$, on obtient donc toutes les solutions de (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. **Déterminer la solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

Dans la solution générale, la condition $f(0) = 20$ donne $k + 5 = 20$, puisque $e^0 = 1$. Ainsi, $k = 15$, d'où l'expression de la vitesse.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. **Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.**

1. Lorsque $t \to +\infty$, $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$.
2. Dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le premier terme tend vers 0 et le second reste égal à 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote, puis en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ étant finie et égale à 5, la courbe C admet une asymptote horizontale d'équation $y = 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. **À l'aide de l'expression fournie de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.**

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est strictement décroissante.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

La vitesse reste strictement supérieure à 5 m/s pour tout $t \geq 0$, car $15e^{-0,8t} > 0$. Elle ne s'annule donc jamais dans le modèle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le chariot ne s'arrête pas, sa vitesse reste supérieure à $5\ \mathrm{m/s}$.

Question 4.a. **Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = 18,75 \times 0,8e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$. Ainsi, F est bien une primitive de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Question 4.b. **Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre t = 0 et t = 1 à l'aide de l'intégrale de f, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

1. Par le théorème fondamental, $d = F(1) - F(0)$.
2. Donc $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$.

L'arrondi au centimètre s'obtient en évaluant cette expression.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Choisir le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de zéro parmi les propositions. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Le reste d'un développement limité à l'ordre 2 s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$. La troisième proposition est la seule à respecter cette forme et les termes affichés par le logiciel.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

Le point de tangence est $(0;20)$. Le coefficient directeur vaut $f'(0) = -12e^0 = -12$. L'équation de la tangente est donc $y = 20 - 12t$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Étude d’un système électrique entrée-sortie par transformées de Laplace

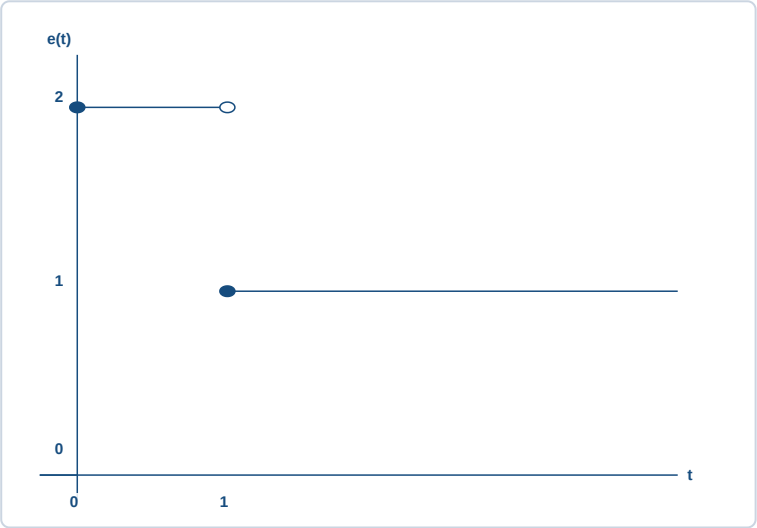
Un système électrique reçoit le signal causal e(t) = 2U(t) - U(t - 1) et produit un signal de sortie s(t), avec une fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). Les questions mobilisent les transformées de Laplace, la décomposition en éléments simples, l’expression de s(t) et la représentation des signaux.

Partie A - Signal d’entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

La causalité impose e(t) = 0 pour t < 0. Pour t ≥ 0, le premier échelon vaut 2. À partir de t = 1, le terme U(t - 1) vaut 1 et est soustrait : le signal passe donc à 1. Avec la convention donnée, U(0) = 1 et U(1 - 1) = 1 : les valeurs aux instants de saut sont donc e(0) = 2 et e(1) = 1.

Signal d’entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

e(t) = 0 si t < 0 ; 2 si 0 ≤ t < 1 ; 1 si t ≥ 1.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d’entrée.

La transformée de Laplace est linéaire. D’après le formulaire, la transformée de U(t) est 1/p et celle de U(t - 1) est e^{-p}/p. On applique ensuite les coefficients de la définition de e(t) : le premier échelon est multiplié par 2, tandis que le second est soustrait.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2}{p} - \frac{e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/[p(p + 1)]]e^(-p).

La fonction de transfert vérifie S(p) = H(p)E(p). On remplace H(p) par 1/(p + 1) et E(p) par l'expression trouvée à la question précédente. En distribuant le facteur 1/(p + 1) sur les deux termes, on obtient directement la transformée de Laplace du signal de sortie demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier la décomposition en éléments simples 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

Pour vérifier l'égalité, on réduit les deux fractions du membre de droite au même dénominateur. Le numérateur obtenu se simplifie en 1, ce qui redonne exactement le membre de gauche :

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{p+1-p}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e^(-p)/p et de e^(-p)/(p + 1), en utilisant le formulaire.

On utilise les transformées usuelles du formulaire. La multiplication par e^{-p} applique le retard d'une unité : la fonction est décalée et multipliée par U(t - 1).

Expression	Transformée inverse
1/p	U(t)
1/(p + 1)	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	U(t - 1)
$e^{-p}/(p + 1)$	$e^{-(t - 1)}U(t - 1)$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les quatre transformées inverses sont indiquées dans le tableau.

Question 4. **Déduire des résultats précédents l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.**

La décomposition de 1/[p(p + 1)] donne l'inverse de S(p) sous la forme 2(1 - e^{-t})U(t) - [U(t - 1) - $e^{-(t - 1)}$U(t - 1)]. Sur l'intervalle [0 ; 1[, U(t) vaut 1 et U(t - 1) vaut 0. Seul le premier terme contribue donc au signal.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur [0 ; 1[, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. **Sachant que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis au dixième près.**

La formule donnée sur [1 ; +∞[s'applique en t = 1. On remplace t par 1 et on simplifie en utilisant e·e^{-1} = 1 :

$$s(1) = (e - 2)e^{-1} + 1 = 2 - \frac{2}{e}.$$

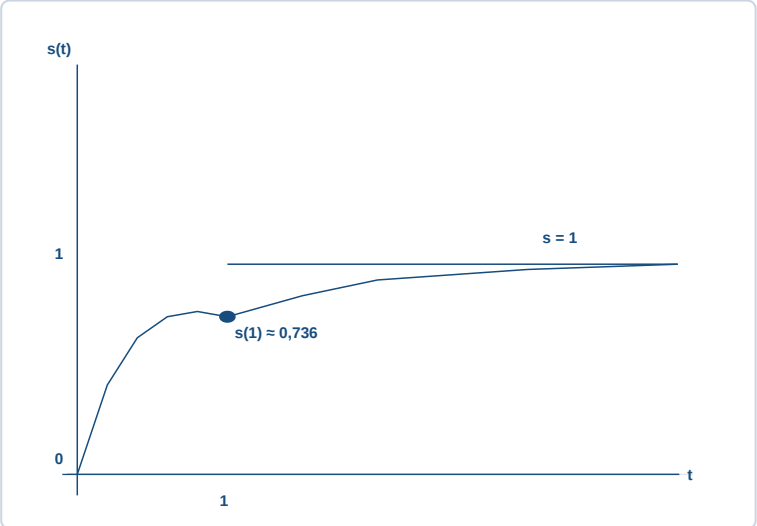
La valeur décimale est environ 1,264 ; arrondie au dixième, elle vaut 1,3.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - \frac{2}{e} \approx 1,3.$

Question 5.b. **Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.**

Sur [0 ; 1[, la courbe suit s(t) = 2(1 - e^{-t}) et croît depuis 0. En t = 1, elle atteint 2 - 2/e, soit environ 0,736. Pour t ≥ 1, s(t) = 1 + (e - 2)e^{-t} : comme e - 2 est positif, la courbe croît vers 1 par valeurs inférieures. La courbe est continue au raccordement.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

La courbe croît de (0 ; 0) à (1 ; 2 - 2/e), puis croît vers l'asymptote s = 1.

Question 5.c. Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour t ≥ 1, l'expression donnée est s(t) = 1 + (e - 2)e^{-t}. Lorsque t tend vers +∞, e^{-t} tend vers 0. Le second terme tend donc vers 0, et la limite de s(t) est la constante restante.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2022, code 22MATGRB2, d'une durée de deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices étudient le freinage d'un chariot et un système électrique, en mobilisant équations différentielles, analyse de fonction, intégration, développement limité et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, la solution générale est la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.
- Si f(t) tend vers L à l'infini, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse sur l'intervalle correspondant.
- La transformée de Laplace de f(t - a)U(t - a) est F(p)e^(-ap).

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale pour sélectionner la solution de l'équation différentielle.
- Une vitesse qui tend vers une limite positive ne signifie pas que le chariot s'arrête.
- Pour la distance, respecter les bornes, donner la valeur exacte, l'arrondi demandé et l'unité.
- Appliquer correctement le décalage temporel dans les transformées et tracer les signaux sur le document-réponse.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment traiter une transformée de Laplace avec un signal retardé ?

Repérez le retard a et la fonction de base f. Le formulaire associe f(t - a)U(t - a) à F(p)e^(-ap). Appliquez cette propriété au terme retardé, puis utilisez la linéarité pour combiner les transformées.

Q : Comment déterminer si le chariot finit par s'arrêter ?

Étudiez la vitesse sur l'intervalle considéré et examinez sa limite. Si elle décroît sans atteindre zéro et tend vers une limite strictement positive, le modèle indique que le chariot ne s'arrête pas.

Q : Combien de temps dure l'épreuve et comment répartir les points ?

L'épreuve dure deux heures et comporte deux exercices de 10 points chacun. Le sujet ne précise pas les points attribués à chaque question ; répartissez le temps selon la difficulté et gardez quelques minutes pour vérifier vos réponses.

Q : Quelles précautions prendre pour la notation et les arrondis ?

Conservez les valeurs exactes lorsque cela est demandé, puis effectuez l'arrondi précisé avec l'unité appropriée. Le sujet demande un arrondi au centimètre pour la distance et au dixième pour la valeur de s(1).

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsme.fr/assets/annales/bts-me/E2 - Mathématiques/2022/BTS ME - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Métiers de l : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.