Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MÉTIERS DE L • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques - Groupement B

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf pour Traitement des matériaux (2 options) : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (14 questions) **Page 3**

2. Probabilités et estimation dans un magasin de vélos (10 questions) **Page 8**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://btsme.fr/assets/annales/bts-me/E2 - Mathématiques/2023/BTS ME - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond du tiroir et le fond du meuble est modélisée par une fonction f du temps, exprimée en centimètres. L’exercice étudie l’équation différentielle du modèle, les variations et le développement limité de f, ainsi qu’un algorithme déterminant quand le tiroir est fermé.

Partie A - Résolution d’une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

Pour l’équation caractéristique, le discriminant vaut $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Comme il est positif, il y a deux racines réelles distinctes. La formule donne $r = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$, soit les deux solutions indiquées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.

Question 1.b. Résoudre l’équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0 sur [0 ; +∞[.

L’équation caractéristique est $r^2 + 5r + 4 = 0$, de racines distinctes -1 et -4. Pour une équation différentielle linéaire homogène du second ordre ayant deux racines réelles distinctes, la solution générale est une combinaison des exponentielles correspondantes. Les constantes sont réelles et arbitraires.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la position initiale du point M, situé à 20 cm de O, et de sa vitesse initiale de -10 cm·s⁻¹ vers O, déterminer f(0) et f'(0).

La fonction $f(t)$ représente la distance OM. À l’instant initial, cette distance est de 20 cm, donc $f(0) = 20$. La vitesse donnée est négative et vaut $-10 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$. Comme la dérivée de la distance correspond à sa vitesse de variation, on a directement $f'(0) = -10$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$.

Question 2.b. En utilisant l’expression admise de f(t), déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

On substitue $t = 2$ dans l’expression de la fonction : $e^{-t} = e^{-2}$ et $e^{-4t} = e^{-8}$. Ainsi, $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. Cette forme est la valeur exacte demandée ; l’approximation sert seulement à en donner un ordre de grandeur.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$OM(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8} \approx 3,16$ cm.

Question 2.c. **Le tiroir est considéré fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes et justifier.**

À $t = 4$, l'expression de la distance donne $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,427$ cm. Cette valeur est strictement inférieure au seuil de fermeture, 0,5 cm. De plus, f est décroissante : le seuil a donc été atteint avant 4 secondes. L'affirmation du constructeur est correcte.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui : $f(4) \approx 0,427 < 0,5$ cm, donc le tiroir est fermé avant 4 secondes.

Partie B - Étude de fonction

Question 1.a. **Sachant que la limite de e^{-u} est 0 lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque $t \to +\infty$, les deux exposants tendent vers $-\infty$. Chacun des termes exponentiels tend donc vers zéro. Les coefficients étant constants, leur combinaison tend également vers zéro.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente une équation de l'asymptote à la courbe représentative de f.**

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 0. La courbe possède donc une asymptote horizontale à droite, d'équation $y = 0$. Cette droite est l'axe des abscisses.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. **Déterminer f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.**

On dérive chaque terme en utilisant la dérivée d'une exponentielle composée : $(e^{-t})' = -e^{-t}$ et $(e^{-4t})' = -4e^{-4t}$. En tenant compte des coefficients et du signe moins du second terme, on obtient la dérivée ci-dessous, valable pour tout $t \in [0; +\infty[$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

La dérivée est négative sur l'intervalle, donc f y est strictement décroissante. De plus, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$, et sa limite en $+\infty$ vaut 0. Le tableau résume ces variations.

t	**0**	$+\infty$
$f(t)$	20	$\searrow$ 0

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

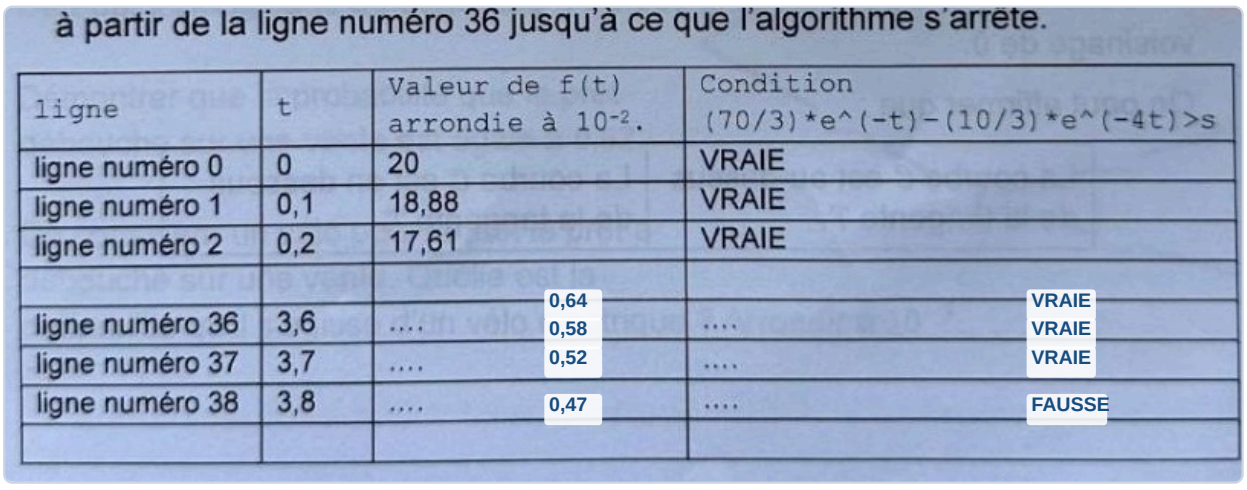
f décroît de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en ajoutant des lignes si nécessaire et en poursuivant jusqu'à l'arrêt. Indiquer t, la valeur de f(t) arrondie au centième et la valeur de la condition de la boucle.

Le pas de l'algorithme est 0,1 seconde et la condition testée est $f(t) > 0,5$. On évalue directement la fonction aux lignes demandées, puis on poursuit jusqu'à la première condition fausse.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

Tableau de l'algorithme complété



✓ RÉPONSE À RETENIR

Ligne 39 : $t = 3,9$, $f(t) \approx 0,47$, condition FAUSSE.

Question 3.b. Donner la valeur de t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

À $t = 3,8$, la distance est encore supérieure au seuil de 0,5 cm : la boucle continue. À $t = 3,9$, elle vaut environ 0,47 cm et la condition devient fausse. L'algorithme s'arrête alors : selon le critère de l'énoncé, le tiroir est fermé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3,9$ s : le tiroir est fermé, car $f(3,9) < 0,5$ cm.

Question 4.a. À partir du développement limité fourni, déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

Le polynôme régulier du développement limité est $20 - 10t - 15t^2$. Au point d'abscisse 0, la valeur de la fonction est 20 et le coefficient de t donne la dérivée, égale à -10. L'équation de la tangente s'écrit donc $y = f(0) + f'(0)t$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

T : $y = 20 - 10t$.

Question 4.b. Choisir, parmi les propositions, l'expression exacte du développement limité de f à l'ordre deux au voisinage de 0. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le développement limité à l'ordre deux doit comporter les termes réguliers affichés par le logiciel, puis un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Parmi les choix, c'est la première proposition qui respecte cette forme.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Première proposition : $f(t) = 20 - 10t - 15t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 4.c. Indiquer si la courbe C est au-dessus ou en dessous de sa tangente T au voisinage de 0. Une seule réponse est attendue, sans justification.

La tangente a pour équation $y = 20 - 10t$. Le développement limité donne alors $f(t) - (20 - 10t) = -15t^2 + o(t^2)$, quantité négative pour $t > 0$ suffisamment proche de 0. Comme le domaine est $[0; +\infty[$, la courbe est sous sa tangente au voisinage de 0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe C est en dessous de la tangente T au voisinage de 0.

2. Probabilités et estimation dans un magasin de vélos

Un magasin prête des vélos électriques ou mécaniques pour favoriser les ventes, puis étudie les durées de réparation sur un échantillon de vélos. Il estime également la proportion de clients susceptibles d'acheter un modèle haut de gamme à partir d'un échantillon de 90 clients.

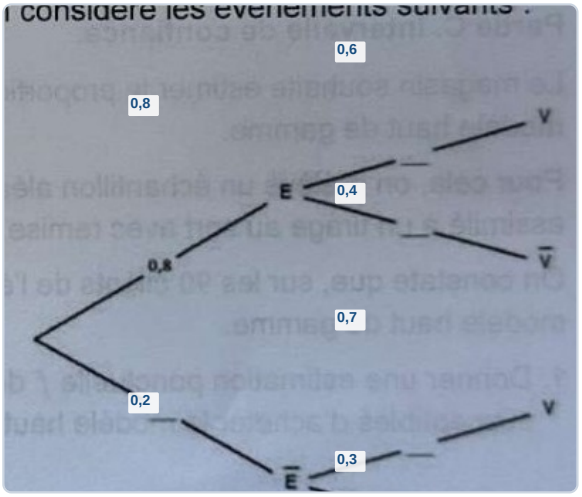
Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Recopier et compléter l'arbre pondéré décrivant le type de vélo prêté et le fait que le prêt débouche ou non sur une vente.

On complète l'arbre en plaçant les probabilités des types de vélos sur les premières branches, puis les probabilités conditionnelles sur les branches de vente.

- Électrique : 0,8 ; mécanique : 0,2.
- Après un vélo électrique : vente 0,6 ; pas de vente 0,4.
- Après un vélo mécanique : vente 0,7 ; pas de vente 0,3.

Arbre pondéré complété



✓ RÉPONSE À RETENIR

Branches : 0,8 et 0,2 ; puis 0,6, 0,4, 0,7 et 0,3.

Question 2. Déterminer la probabilité qu'un vélo prêté soit électrique et que le prêt débouche sur une vente, soit P(E ∩ V).

Pour que le vélo soit électrique et que le prêt débouche sur une vente, on multiplie la probabilité d'avoir un vélo électrique par la probabilité conditionnelle de vente :
$P(E \cap V) = P(E) \times P(V \mid E) = 0,8 \times 0,6 = 0,48.$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(E \cap V) = 0,48.$

Question 3. **Démontrer que la probabilité qu'un prêt débouche sur une vente est égale à 0,62.**

Les événements « vélo électrique » et « vélo mécanique » forment une partition. La formule des probabilités totales donne :

$$P(V) = P(E)P(V \mid E) + P(\overline{E})P(V \mid \overline{E})$$
$$= 0,8 \times 0,6 + 0,2 \times 0,7 = 0,62.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(V) = 0,62.$

Question 4. **Sachant que le prêt a débouché sur une vente, déterminer la probabilité que le vélo prêté soit électrique. Arrondir à 10^{-3}.**

La probabilité demandée est conditionnelle à la vente. L'intersection a pour probabilité 0,48 et la vente pour probabilité 0,62 ; ainsi,
$P(E \mid V) = \dfrac{P(E \cap V)}{P(V)} = \dfrac{0,48}{0,62} \approx 0,774.$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(E \mid V) \approx 0,774.$

Partie B - Loi binomiale

Question 1. **La variable aléatoire X compte, parmi 80 vélos réparés, ceux dont la réparation a nécessité moins d'une heure de main-d'œuvre. Sachant que X suit une loi binomiale, donner ses paramètres.**

Chaque réparation est une épreuve de Bernoulli : le succès correspond à une durée de main-d'œuvre inférieure à une heure, avec une probabilité de 0,62. L'échantillon porte sur 80 vélos, et l'énoncé admet que le nombre de succès suit une loi binomiale. Ses paramètres sont donc le nombre d'épreuves et la probabilité de succès.

$X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0,62).$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0,62).$

Question 2. **Déterminer P(X = 40). Arrondir à 10^{-3}.**

Pour une loi binomiale de paramètres 80 et $0,62$, la probabilité d'obtenir exactement 40 réparations de moins d'une heure est :

$P(X = 40) = \binom{80}{40}(0,62)^{40}(1-0,62)^{40} \approx 0,00829.$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(X = 40) \approx 0,008$.

Question 3. Déterminer la probabilité que, dans l'échantillon, le nombre de vélos nécessitant moins d'une heure de main-d'œuvre soit strictement supérieur au nombre de vélos nécessitant plus d'une heure de main-d'œuvre. Arrondir à 10^{-3}.

1. Le nombre de vélos nécessitant plus d'une heure est $80 - X$.
2. La condition demandée est $X > 80 - X$, soit $X \geq 41$.
3. Pour $X \sim \mathcal{B}(80; 0,62)$, on obtient $P(X \geq 41) = 1 - P(X \leq 40) \approx 0,981$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité cherchée est $0,981$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. À partir des 54 clients sur 90 susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme, donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p.

L'estimation ponctuelle de la proportion est la fréquence observée dans l'échantillon :
$f = \dfrac{54}{90} = 0,6$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f = 0,6$, soit 60 %.

Question 2.a. En utilisant la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95 %.

On utilise la formule fournie avec $f = 0,6$ et $n = 90$.

Étape	Calcul	Valeur
Marge	$1,96\sqrt{\dfrac{0,6(1-0,6)}{90}}$	$0,1012$
Intervalle	$[0,6 - 0,1012\,;\, 0,6 + 0,1012]$	$[0,499\,;\, 0,701]$

Les bornes sont arrondies au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,499\,;\, 0,701]$.

Question 2.b. Indiquer si l'on est certain que la proportion p appartient à cet intervalle de confiance.

Non. Un intervalle de confiance à 95 % ne garantit pas que la proportion inconnue appartient à l'intervalle obtenu pour cet échantillon. Le niveau de 95 % caractérise la procédure : répétée sur de nombreux échantillons, elle produit des intervalles contenant la proportion dans environ 95 % des cas.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, l'appartenance de p à cet intervalle n'est pas certaine.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, porte le code 23MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient est de 2 pour la plupart des spécialités et de 3 pour les deux options de Traitement des matériaux. Les deux exercices évaluent équations différentielles, fonctions, développement limité, probabilités, loi binomiale et estimation d'une proportion.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, les racines caractéristiques déterminent la forme de la solution générale.
- Si f(t) tend vers une limite finie L lorsque t tend vers $+\infty$, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La formule des probabilités totales donne P(V) = P(E)P(V|E) + P(non E)P(V|non E).
- Pour X suivant une loi binomiale B(n,p), $P(X = k) = C(n,k)p^k(1-p)^{n-k}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer les conditions initiales à la solution générale pour déterminer les constantes de l'équation différentielle.
- Dans l'algorithme, incrémenter t de 0,1 et vérifier distinctement la valeur de f(t) et la condition de boucle.
- Traduire avec soin la comparaison stricte des nombres de réparations de moins d'une heure et de plus d'une heure.
- Un intervalle de confiance à 95 % ne garantit pas avec certitude que la proportion inconnue appartient à l'intervalle calculé.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer les constantes de la solution de l'équation différentielle du tiroir ?

Résolvez d'abord l'équation caractéristique pour obtenir la solution générale. Utilisez ensuite les conditions initiales f(0) = 20 et f'(0) = -10 pour former un système et déterminer les constantes.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un prêt de vélo aboutisse à une vente ?

Additionnez les probabilités des chemins qui aboutissent à une vente : P(E)P(V|E) et P(non E)P(V|non E). Les données du sujet conduisent à la probabilité totale de 0,62.

Q : Comment traduire la comparaison des durées de réparation dans la partie binomiale ?

X désigne le nombre de réparations de moins d'une heure parmi 80 vélos. Si le nombre de réparations de plus d'une heure est son complément, la comparaison stricte s'écrit X > 80 - X, soit X > 40.

Q : Que signifie le niveau de confiance de 95 % dans la dernière partie ?

La méthode produit des intervalles qui contiennent la proportion réelle dans environ 95 % des échantillons constitués de la même manière. Pour l'échantillon observé, on ne peut donc pas affirmer avec certitude que l'intervalle contient p.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsme.fr/assets/annales/bts-me/E2 - Mathématiques/2023/BTS ME - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Métiers de l : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.