Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MÉTIERS DE L • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Séries de Fourier d’une fonction périodique paire (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsme.fr/assets/annales/bts-me/E2 - Mathématiques/2023/BTS ME - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond du tiroir, repéré par M, et le fond du meuble, repéré par O, est modélisée par f(t), en centimètres, où t est exprimé en secondes. L'exercice étudie cette distance par une équation différentielle puis par l'analyse de la fonction, notamment pour évaluer le temps de fermeture et la position moyenne.

Partie A

Question 1. a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On factorise le trinôme : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. Le produit est nul si l'un des facteurs est nul. Les deux racines sont donc -1 et -4, distinctes et réelles.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1. b. À l'aide des solutions de l'équation caractéristique et du tableau fourni, résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.

> L'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes, $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$. D'après le tableau fourni, les solutions de l'équation différentielle sont les combinaisons linéaires des exponentielles correspondantes. Les constantes sont arbitraires puisqu'aucune condition initiale n'est imposée ici.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2. a. Sachant qu'à l'instant t = 0, le point M est situé à 20 cm de O et se déplace vers O à la vitesse négative de -10 cm·s⁻¹, déterminer f(0) et f'(0).

Comme $f(t)$ représente la distance OM, la distance initiale donne directement $f(0)$. La dérivée représente la vitesse de déplacement de M par rapport à O ; son signe négatif traduit le rapprochement, et sa valeur est donnée dans l'énoncé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2. b. On admet que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ. Déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

On remplace t par 2 dans l'expression de f : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. Cette distance est positive. Sa valeur exacte est donnée par l'expression, et son approximation permet de situer la distance en centimètres.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$OM = f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8} \approx 3{,}157$ cm.

Question 2. c. Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer, en justifiant, si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

La dérivée vaut $f'(t) = \frac{10}{3}e^{-4t}(4 - 7e^{3t})$, donc elle est négative pour tout $t \geq 0$. La distance décroît ainsi continûment.

- À 4 secondes : $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}427$ cm.
- Cette valeur est inférieure à $0{,}5$ cm : le seuil a donc été franchi avant 4 secondes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui : $f(4) \approx 0{,}427 < 0{,}5$ cm, donc le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

Partie B

Question 1. a. Pour la fonction f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ définie sur [0 ; +∞[, déterminer sa limite lorsque t tend vers +∞.

Quand $t \to +\infty$, les exposants $-t$ et $-4t$ tendent vers $-\infty$. Ainsi, $e^{-t} \to 0$ et $e^{-4t} \to 0$. La fonction étant une combinaison de ces deux exponentielles, sa limite est nulle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1. b. En déduire que la courbe représentative de f possède une asymptote et donner une équation de cette asymptote.

> La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et égale à 0. La courbe représentative possède donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$, qui est l'axe des abscisses.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2. a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque exponentielle avec $(e^{at})' = ae^{at}$. Ainsi, le premier terme donne $-\frac{70}{3}e^{-t}$, tandis que le second donne $\frac{40}{3}e^{-4t}$, car le facteur -4 se multiplie par $-\frac{10}{3}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2. b. On admet que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[. En déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.

La dérivée étant strictement négative sur $[0;+\infty[$, la fonction est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 0$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît de 20 vers 0 sur $[0;+\infty[$.

Question 3. a. Compléter le tableau de suivi de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36, en ajoutant des lignes si nécessaire. Pour chaque valeur de t, indiquer f(t) arrondie au centième et le résultat du test de la condition de boucle, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

À chaque ligne, le test porte sur la valeur non arrondie de $f(t)$. Le tableau indique les valeurs arrondies au centième ; à la ligne 39, le test devient faux et l'algorithme s'arrête.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	$f(t) > 0{,}5$
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête à la ligne 39, pour $t = 3{,}9$.

Question 3. b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

1. À $t = 3{,}8$, la distance est encore supérieure à $0{,}5$ cm, donc la boucle continue.
2. À $t = 3{,}9$, elle vaut environ $0{,}47$ cm : le test devient faux et l'algorithme s'arrête.

Le pas de calcul étant de 0,1 seconde, le résultat donne une estimation du premier instant testé où le tiroir est fermé.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $t = 3{,}9$ s : premier instant testé où $OM < 0{,}5$ cm.

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

On intègre les deux termes puis on divise par 4 : $m = \frac{1}{4}\left[\frac{70}{3}(1 - e^{-4}) - \frac{10}{12}(1 - e^{-16})\right]$. En regroupant les termes constants et ceux contenant une exponentielle, on obtient bien l'expression demandée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16} \approx 5{,}518159$ cm.

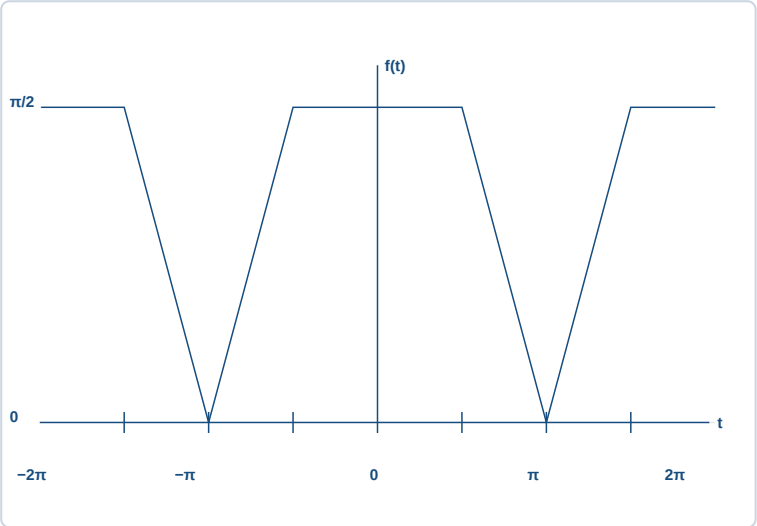
2. Séries de Fourier d'une fonction périodique paire

On étudie une fonction paire de période 2π définie par morceaux sur [0 ; π]. Les questions portent sur son tracé, ses coefficients de Fourier, une somme partielle et l'approximation de sa valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [-2π ; 2π], en utilisant sa définition par morceaux ainsi que ses propriétés de parité et de périodicité.

Sur $[0;\pi/2[$, la fonction vaut $\pi/2$, puis elle décroît en ligne droite jusqu'à zéro en π. La parité reproduit ces valeurs à gauche de l'origine, et la période 2π répète le motif. Le tracé sur l'intervalle demandé comporte donc des plateaux à $\pi/2$, des segments obliques et des minima nuls en $-\pi$ et π.

Représentation de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Tracer le motif pair et périodique de période 2π, avec hauteur maximale $\pi/2$ et zéros en $-\pi$ et π.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

D'après le formulaire, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$, puisque $T = 2\pi$ et $\omega = 1$. La fonction f est paire, alors que $t \mapsto \sin(nt)$ est impaire. Leur produit est donc impair. Son intégrale sur l'intervalle symétrique $[-\pi;\pi]$ est nulle, quel que soit l'entier $n \geq 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, le coefficient de Fourier est $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.

Le formulaire relie la période T à la pulsation par $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Ici, la fonction est périodique de période $T = 2\pi$. En substituant cette valeur, on obtient $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. La pulsation est exprimée en radians par unité de temps.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La pulsation associée à la fonction est $\omega = 1$ radian par unité de temps.

Question 4. Démontrer que le coefficient a₀ est égal à 3π/8.

Le formulaire donne $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$. Comme la fonction est paire et de période 2π, l'intégrale sur une période vaut deux fois celle sur $[0;\pi]$, donc $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt$. En utilisant les deux expressions de f, l'aire vaut $\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{3\pi^2}{8}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le coefficient constant vaut exactement $a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, aₙ = ∫₀^(π/2) cos(nt)dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π - t)cos(nt)dt.

Pour une fonction paire, le formulaire donne $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$. Avec $T = 2\pi$ et $\omega = 1$, cela devient $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)\,dt$. Sur $[0;\pi/2[$, $f(t) = \pi/2$; sur $[\pi/2;\pi]$, $f(t) = \pi - t$. En séparant l'intégrale, on obtient la formule demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$.

Question 6. On admet que aₙ = 2/(πn²)(cos(nπ/2) - cos(nπ)). Déterminer les valeurs exactes de a₁, a₂ et a₃.

On substitue successivement $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$ dans la formule admise $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right)$. Pour les indices impairs, les cosinus concernés valent respectivement zéro et -1. Pour $n = 2$, ils valent -1 et 1. Ces substitutions donnent les trois coefficients exacts.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Les coefficients exacts sont $a_1 = \frac{2}{\pi}$, $a_2 = -\frac{1}{\pi}$ et $a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

Question 7. En déduire que s₃(t) = 3π/8 + (2/π)cos(t) - (1/π)cos(2t) + (2/(9π))cos(3t).

La somme partielle d'ordre 3 s'écrit $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$. Les coefficients sinus sont nuls d'après la question 2. On remplace le terme constant et les trois coefficients cosinus par les valeurs déterminées aux questions précédentes. La substitution donne directement l'expression demandée pour $s_3(t)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

On obtient $s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

Question 8. Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées représente la fonction s_3.

Courbe numéro 3.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La fonction s_3 est représentée par la courbe numéro 3.

Question 9. a. On note $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$. Donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.

À partir des coefficients exacts, $P = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{9\pi}\right)^2\right]$. Après réduction, $P = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2}$. On évalue cette expression puis on arrondit au dix-millième, comme demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

À 10^{-4} près, $P \approx 1{,}6437$.

Question 9. b. On note F la valeur efficace de f et on admet que $F^2 = \pi^2/6$. Sachant que P constitue une approximation de F^2, choisir le pourcentage d'erreur parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est attendue, sans justification.

Le pourcentage d'erreur relatif est $\frac{|P - F^2|}{F^2} \times 100$. En utilisant la valeur non arrondie de P et $F^2 = \frac{\pi^2}{6}$, l'erreur est d'environ $0{,}0739\%$. Parmi les trois propositions, cette valeur est la plus proche de $0{,}1\%$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le pourcentage d'erreur à choisir parmi les propositions est $0{,}1\%$.

SYNTHÈSE DE L'ÉPREUVE & RÉFÉRENTIEL • BTS MÉTIERS DE L

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, porte le code 23MATGRB2 et dure deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices, notés chacun sur 10, étudient la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et analyse de fonction, puis les séries de Fourier d'une fonction paire et sa valeur efficace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, les racines de $r^2 + 5r + 4 = 0$ déterminent les exponentielles de la solution générale.
- Si $f'(t) < 0$ sur un intervalle, f y est décroissante ; une limite finie en $+\infty$ donne une asymptote horizontale.
- Pour une fonction paire de période T, $b_n = 0$ et $a_n = (4/T)\int_0^{(T/2)} f(t)\cos(n\omega t)dt$.
- La somme partielle $s_n(t)$ rassemble le terme a_0 et les termes de Fourier jusqu'au rang n.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : f(t) est une distance en centimètres et t est exprimé en secondes.
- Traduire la vitesse initiale négative par $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}, sans la confondre avec la distance f(0).
- Dans l'algorithme, suivre les incréments de 0,1 et s'arrêter dès que la condition de boucle est fausse.
- Pour Fourier, distinguer a_0 des coefficients a_n et utiliser la formule adaptée à une fonction paire.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver la solution générale de l'équation différentielle du tiroir ?

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses deux racines réelles distinctes donnent une solution générale de la forme $y(t) = C_1e^{r1t} + C_2e^{r2t}$. Les conditions initiales déterminent ensuite les constantes.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice sur Fourier ?

La fonction est paire et le sinus est impair. Leur produit est donc impair sur un intervalle symétrique, ce qui donne une intégrale nulle. Ainsi, $b_n = 0$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Q : Comment organiser les deux heures d'épreuve ?

Les deux exercices valent chacun dix points et leurs parties peuvent être traitées séparément lorsque le sujet le précise. Répartissez le temps entre les questions, puis gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités et les réponses à choix multiple.

Q : Quelles attentes de présentation faut-il respecter dans ce sujet ?

Le sujet demande des démonstrations, des résultats exacts, des valeurs approchées à la précision indiquée et un tableau d'algorithme complété. Pour le choix multiple sur le pourcentage d'erreur, une seule réponse est attendue et aucune justification n'est demandée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsme.fr/assets/annales/bts-me/E2 - Mathématiques/2023/BTS ME - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Métiers de l : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.