Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MÉTIERS DE L • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRD1** • Durée : **Non indiquée sur les pages fournies**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Évolution de la température de l'eau d'un spa (12 questions) **Page 3**

2. Contrôles qualité et commercialisation de farine en minoterie (12 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsme.fr/assets/annales/bts-me/E2 - Mathématiques/2023/BTS ME - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf

1. Évolution de la température de l'eau d'un spa

Après la coupure du chauffage, la température de l'eau du spa, initialement à 38 °C, est modélisée par une fonction vérifiant une équation différentielle, tandis que la température ambiante reste à 25 °C. L'exercice étudie cette fonction, son évolution et un algorithme associé au déclenchement d'une alarme.

Partie A

Question 1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle y' + 0,05y = 0 sur l'intervalle [0 ; +∞[.

On réécrit l'équation sous la forme $y' = -0{,}05y$. Une solution exponentielle s'écrit alors $y(t) = Ce^{-0{,}05t}$, où C est une constante réelle. En effet, sa dérivée vaut $-0{,}05Ce^{-0{,}05t}$, donc $y' + 0{,}05y = 0$. Ces fonctions donnent toutes les solutions sur $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer une fonction constante solution particulière de l'équation différentielle y' + 0,05y = 1,25 sur [0 ; +∞[.

Pour chercher une solution constante, on pose $y(t) = k$. Sa dérivée est nulle et l'équation devient $0{,}05k = 1{,}25$. On obtient donc $k = 1{,}25/0{,}05 = 25$. La fonction constante égale à 25 est bien une solution particulière de l'équation avec second membre.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution particulière constante est $y(t) = 25$.

Question 3. En déduire les solutions de l'équation différentielle y' + 0,05y = 1,25.

Les solutions de l'équation différentielle avec second membre s'obtiennent en ajoutant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène associée. La solution particulière trouvée est la constante 25, et les solutions homogènes sont de la forme $Ce^{-0{,}05t}$. On obtient donc la famille complète des solutions sur l'intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}05t} + 25$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 4. Montrer que, pour tout t de [0 ; +∞[, f(t) = 13e^(-0,05t) + 25.

La solution générale est $f(t) = Ce^{-0{,}05t} + 25$. La condition initiale donne $f(0) = C + 25 = 38$, puisque $e^0 = 1$. Ainsi, $C = 38 - 25 = 13$. En remplaçant cette constante dans la solution générale, on obtient bien l'expression demandée pour tout $t \geq 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 13e^{-0{,}05t} + 25$.

Partie B

Question 1. Calculer f(24), arrondir le résultat au dixième, puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

On évalue le modèle au temps $t = 24$ heures : $f(24) = 13e^{-0{,}05\times 24} + 25 \approx 28{,}9155$. Arrondi au dixième, cela donne $28{,}9$. Cette valeur représente la température de l'eau du spa après 24 heures sans alimentation électrique, en degrés Celsius.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Après 24 h, la température de l'eau est d'environ $28{,}9\ ^\circ\mathrm{C}$.

Question 2. a). Déterminer une expression de f'(t) pour tout t de [0 ; +∞[.

La dérivée de $e^{-0{,}05t}$ est $-0{,}05e^{-0{,}05t}$, par dérivation de la fonction composée. Le terme constant 25 a pour dérivée zéro. En dérivant $f(t) = 13e^{-0{,}05t} + 25$, on multiplie donc le coefficient 13 par $-0{,}05$, ce qui donne l'expression de f'.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -0{,}65e^{-0{,}05t}$.

Question 2. b). Déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[, puis préciser si ce sens de variation paraît cohérent avec le contexte et argumenter.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0{,}05t} > 0$. Ainsi, $f'(t) = -0{,}65e^{-0{,}05t} < 0$, donc f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$. Ce résultat est cohérent avec la situation : après la coupure de l'alimentation électrique, l'eau perd de la chaleur et sa température baisse.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est strictement décroissante : l'eau refroidit après la coupure du chauffage.

Question 3. a). Déterminer la limite de f en +∞.

Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0{,}05t$ tend vers $-\infty$. Par conséquent, $e^{-0{,}05t}$ tend vers zéro. Dans l'expression $f(t) = 13e^{-0{,}05t} + 25$, le terme exponentiel tend donc vers zéro et le terme constant reste égal à 25.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 25.$

Question 3. b). Interpréter la valeur de la limite obtenue dans le contexte de l'exercice.

La limite représente la température vers laquelle l'eau du spa se rapproche au fil du temps selon le modèle. Elle est égale à $25\ °\mathrm{C}$, soit la température ambiante extérieure, qui reste constante. Le modèle prévoit donc que l'eau finit par atteindre la température de son environnement.

✓ RÉPONSE À RETENIR

À long terme, l'eau tend vers la température ambiante : $25\ °\mathrm{C}$.

Question 4. a). L'alarme sonne lorsque la température devient strictement inférieure à la température programmée. Pour un réglage à 36 °C, déterminer par le calcul le temps écoulé avant que l'alarme retentisse, en donnant la valeur exacte puis la valeur arrondie à la minute.

On cherche d'abord l'instant où l'eau atteint exactement le seuil : $13e^{-0{,}05t} + 25 = 36$, donc $e^{-0{,}05t} = 11/13$, puis $t = -20\ln(11/13)$ heures. Cela correspond à environ $200{,}465$ minutes, soit 200 minutes à la minute près. L'alarme, déclenchée sous 36 °C, sonne juste après cet instant de franchissement.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Franchissement à $-20\ln(11/13)$ h, soit environ 200 min (3 h 20 min).

Question 4. b). Déterminer la valeur numérique affichée par l'algorithme fourni, en suivant ses instructions et sa condition de boucle.

L'algorithme augmente H d'une unité tant que la température calculée est supérieure ou égale à 34 °C. À $H = 7$, $T = 13e^{-0{,}05\times 7} + 25 \approx 34{,}1609$, donc la boucle continue. À $H = 8$, $T = 13e^{-0{,}05\times 8} + 25 \approx 33{,}7142 < 34$: la boucle s'arrête et affiche alors $H = 8$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La valeur affichée par l'algorithme est 8.

Question 4. c). Expliquer ce que l'algorithme permet de déterminer dans le contexte de l'évolution de la température du spa.

À chaque étape, l'algorithme ajoute une heure à H, calcule la température correspondante, puis teste si elle est encore supérieure ou égale à 34 °C. Il s'arrête dès qu'elle devient strictement inférieure à ce seuil. Il détermine ainsi le premier nombre entier d'heures après la coupure où la température passe sous 34 °C.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Il détermine le premier nombre entier d'heures où l'eau passe sous $34\ ^\circ\mathrm{C}$.

2. Contrôles qualité et commercialisation de farine en minoterie

Une minoterie contrôle l'extensibilité de pâtes et le taux d'humidité de blés livrés, puis conditionne sa farine en sacs dont la masse est modélisée par une loi normale. L'exercice porte aussi sur les probabilités qu'un client accepte de tester la farine La Romaine et sur le nombre de clients concernés dans un échantillon.

Partie A

Question 1. a). À partir des cinq indices d'extensibilité mesurés (104, 81, 83, 57 et 55 mm), donner la moyenne de la série et son écart-type arrondi au centième.

La moyenne est $\bar{x} = (104 + 81 + 83 + 57 + 55)/5 = 76$ mm. L'écart-type, calculé avec le diviseur 5, vaut $\sqrt{[(104-76)^2 + (81-76)^2 + (83-76)^2 + (57-76)^2 + (55-76)^2]/5} = \sqrt{332} \approx 18,22$ mm.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Moyenne : 76 mm ; écart-type : 18,22 mm.

Question 1. b). En considérant que l'écart-type de la série est de 18 mm, vérifier qu'aucune valeur ne se trouve à l'extérieur de l'intervalle [x̄ − 2σ ; x̄ + 2σ] et conclure si un test sur cinq nouveaux échantillons est nécessaire.

Borne	Calcul	Valeur
Inférieure	$76 - 2 \times 18$	40 mm
Supérieure	$76 + 2 \times 18$	112 mm

Les cinq mesures, de 55 à 104 mm, appartiennent à cet intervalle. Aucun nouveau test n'est nécessaire.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Intervalle : [40 ; 112] mm. Aucun nouveau test n'est nécessaire.

Question 2. Les deux camions contiennent respectivement 29 540 kg de blé à 12,4 % d'humidité et 14 540 kg à 14,1 %. Sachant que le cahier des charges exige un taux inférieur à 13 % dans un même silo, montrer que le technicien peut autoriser leur déchargement dans un silo vide.

Le taux d'humidité du mélange est la moyenne pondérée par les masses : $\frac{29540 \times 12,4 + 14540 \times 14,1}{29540 + 14540} \approx 12,961\%$. Comme il est inférieur à 13 %, le cahier des charges est respecté.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Taux du mélange : environ 12,961 %. Le déchargement est autorisé.

Partie B

Question 1. La masse X d'un sac suit une loi normale de moyenne 25,2 kg et d'écart-type 0,1 kg. Calculer, au millième près, la probabilité qu'un sac choisi au hasard ait une masse inférieure à 25 kg.

Étape	Calcul
Variable centrée réduite	$Z = (X - 25,2)/0,1$
Seuil associé à 25 kg	$(25 - 25,2)/0,1 = -2$

Donc $P(X < 25) = P(Z < -2) \approx 0,02275$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Probabilité : 0,023 au millième près.

Question 2. a). Déterminer un réel h tel que P(25,2 − h ≤ X ≤ 25,2 + h) soit approximativement égale à 0,95, à 0,01 près.

Pour une loi normale, l'intervalle central de probabilité 0,95 s'étend à environ $1,96$ écarts-types de la moyenne. Ainsi, $h = 1,96 \times 0,1 = 0,196$ kg, soit 0,20 kg au centième près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $h = 0,20$ kg.

Question 2. b). À partir de la représentation graphique fournie, expliquer pourquoi la courbe ne peut pas représenter la fonction de densité de la variable aléatoire X.

Pour $\sigma = 0,1$ kg, environ 95 % des masses sont dans l'intervalle $[25,2 - 1,96 \times 0,1\ ;\ 25,2 + 1,96 \times 0,1]$, soit environ $[25,004\ ;\ 25,396]$ kg. Or la courbe dessinée est beaucoup plus étalée autour de 25,2 kg.

- La dispersion représentée est donc incompatible avec l'écart-type de 0,1 kg.
- Cette courbe ne peut pas être la densité de X.

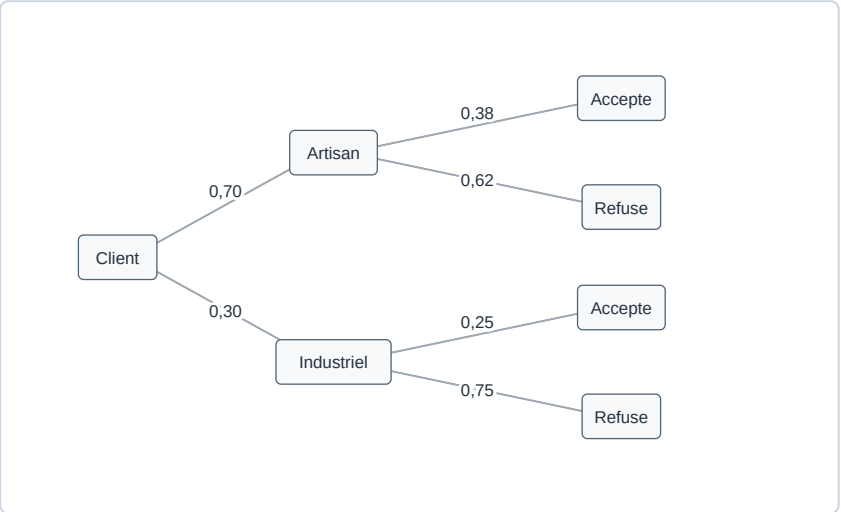
> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe est trop étalée pour représenter la densité de X.

Partie C

Question 1. Représenter la situation décrite à l'aide d'un arbre pondéré, en distinguant les artisans boulangers et les boulangers industriels, puis l'acceptation ou le refus de tester la farine La Romaine.

Au premier niveau, les probabilités sont 0,70 pour un artisan et 0,30 pour un industriel. Au second niveau, les probabilités de refus sont les complémentaires des probabilités d'acceptation.

Arbre pondéré des clients et de leur réponse



Probabilités inscrites sur chaque branche.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Branches : artisan 0,70, industriel 0,30 ; acceptation 0,38 et 0,25 ; refus 0,62 et 0,75.

Question 2. a). Calculer la probabilité que le client choisi soit un artisan boulanger et accepte de tester la farine La Romaine.

La probabilité qu'un client soit artisan et accepte de tester la farine est le produit de la probabilité d'être artisan par la probabilité conditionnelle d'accepter : $P(A \cap T) = 0,70 \times 0,38 = 0,266$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A \cap T) = 0,266$.

Question 2. b). Montrer que la probabilité qu'un client accepte de tester la farine La Romaine est égale à 0,341.

1. Client artisan et acceptation : $0,70 \times 0,38 = 0,266$.
2. Client industriel et acceptation : $0,30 \times 0,25 = 0,075$.

Ces deux cas étant disjoints, $P(T) = 0,266 + 0,075 = 0,341$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité d'accepter le test est 0,341.

Question 3. Sachant qu'un client a testé la farine La Romaine, calculer au millième près la probabilité que ce soit un artisan boulanger.

Par la formule de probabilité conditionnelle, $P(A \mid T) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}266}{0{,}341} \approx 0,7800587$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Probabilité : 0,780 au millième près.

Question 4. a). On admet que Y, le nombre de clients ayant testé la farine parmi 200 clients choisis, suit une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,341. Calculer au millième près la probabilité qu'au plus 60 clients aient testé la farine.

Pour $Y \sim \mathcal{B}(200; 0,341)$, on additionne les probabilités correspondant à $k = 0$ jusqu'à $k = 60$: $P(Y \leq 60) = \sum_{k=0}^{60} \binom{200}{k} (0,341)^k (0,659)^{200-k} \approx 0,125$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Probabilité : 0,125 au millième près.

Question 4. b). Calculer l'espérance de Y et interpréter sa valeur dans le contexte de l'exercice.

L'espérance d'une loi binomiale est $E(Y) = np$. Donc $E(Y) = 200 \times 0,341 = 68,2$. À long terme, environ 68 clients sur 200 auront testé la farine en moyenne.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$E(Y) = 68,2$ clients.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques de BTS, session 2023, porte le code 23MATGRD1. La durée et le coefficient ne sont pas indiqués sur les pages fournies, et le barème de l'exercice 1 n'y apparaît pas. Les exercices étudient le refroidissement d'un spa, puis les contrôles qualité d'une minoterie, la loi normale, les probabilités conditionnelles et la loi binomiale.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, la solution générale est la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière.
- Pour f(t) = Ce^(-kt) + L avec k > 0, la fonction tend vers L lorsque t tend vers +∞.
- Le taux d'humidité d'un mélange est une moyenne pondérée des taux des lots par leurs masses.
- Pour Y suivant B(n,p), E(Y) = np ; une probabilité conditionnelle vérifie P(A|T) = P(A∩T)/P(T).

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : temps en heures, températures en °C, masses en kg et taux en pourcentage.
- Calculer la moyenne avant de construire les bornes $\bar{x} - 2\sigma$ et $\bar{x} + 2\sigma$ pour le contrôle des mesures.
- Dans un arbre pondéré, inscrire les probabilités sur les branches et vérifier que celles issues d'un même nœud totalisent 1.
- Respecter les arrondis demandés et interpréter les résultats dans leur contexte, notamment pour la limite et l'espérance.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du modèle de température du spa ?

Résoudre d'abord l'équation homogène y' + 0,05y = 0, puis chercher une solution constante de l'équation complète. La solution générale s'obtient en les combinant, et la condition f(0) = 38 permet de déterminer la constante.

Q : Comment calculer le taux d'humidité du mélange des deux camions ?

Calculer, pour chaque camion, la masse d'eau en multipliant la masse de blé par son taux d'humidité. Diviser la somme des masses d'eau par la masse totale de blé, puis comparer le résultat au seuil strict de 13 %.

Q : Comment calculer la probabilité qu'au plus 60 clients aient testé la farine ?

Le nombre de clients concernés suit la loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,341. La probabilité demandée est P(Y ≤ 60), que l'on obtient avec la fonction de répartition binomiale ou un outil de calcul.

Q : Quels critères de rédaction et d'arrondi faut-il respecter dans ce sujet ?

Présenter les calculs justifiant chaque résultat, respecter les précisions demandées et donner une interprétation adaptée au contexte. Pour l'algorithme, suivre les instructions dans leur ordre et tenir compte de la condition de boucle.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsme.fr/assets/annales/bts-me/E2 - Mathématiques/2023/BTS ME - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf

Ressources BTS Métiers de l : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.